数理解析研究所講究録
168巻 1972年 17-27



# 多次元径数を持つ正規定常過程のマルコフ性 (II)

阪大 理　小谷 眞一

## §1　序.

前回の報告[1]では多次元径数正規定常過程がマルコフ性をもつための1つの十分条件を与えた。この報告ではその延長線上にある2つの問題について述べる。

1つはこの定常過程の spectral density $\Delta$ にある制限を設けることにより，マルコフ性と $\Delta^{-1}$ が infra exponential type の entire function になることが同値であることを示すことであるが，これは[2]の要約である。方法は $Z \in L^2(\Delta)$ の元の Fourier 変換をある Ultradistribution の空間で実現することにある。

他の1つは Process がマルコフの場合の Prediction と境界値問題との関係についての話である。

ここでマルコフ性の定義を与えておこう。

$\mathbb{R}^d$ に径数をもつ確率空間 $(\Omega, \mathbb{B}, P)$ 上の正規定常過程を $X=$

$(X(x,\omega) : x \in \mathbb{R}^d \cdot \omega \in \Omega)$ とする。

即ち，① $X : \mathbb{R}^d \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ 可測関数

②（平均 0） $\int_\Omega X(x,\omega)\,dP(\omega) = 0 \quad {}^\forall x \in \mathbb{R}^d$

以後簡単のため $X(x) \equiv X(x,\omega)$ とかく。

③（正規） $X$ の correlation $R$ を $R(x,y) = \int_\Omega X(x)X(y)\,dP$

としたとき ${}^\forall x_1, , x_n \in \mathbb{R}^d$ に対して，

$$P((X(x_1), , , X(x_n)) \in E) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \det v} \int_E e^{-\frac{1}{2} x v^{-1} x}\,dx$$

但し $v = (R(x_i, x_j))$ ，E は $\mathbb{R}^d$ の Borel set である。

④（定常性）

$$R(x,y) = {}^\exists R(x-y)$$

をみたす Process のことである。R は定義より non-negative definite であるから連続性があれば Bochner の定理より測度 $d\sigma$ の Fourier 変換で表わされるが，ここではさらに $d\sigma$ が density $\Delta$ をもつと仮定する。

即ち $\qquad d\sigma(\lambda) = \Delta(\lambda)\,d\lambda.$

次に $\mathbb{B}$ の sub $\sigma$-fields を導入するが，G は $\mathbb{R}^d$ の開集合，D は $\mathbb{R}^d$ の有界閉集合を表わすものとする。$\mathbb{B}(G) = \sigma(X(x) : x \in G)$ $\underset{\text{i.e}}{=}$ $\{(X(x) : x \in G)$ をすべて可測にする最小の $\sigma$-field $\}$ として，D に対して $\mathbb{B}_\pm(D)$，$\partial\mathbb{B}(D)$ を次のように定める。

$$\mathbb{B}_+(D) = \bigcap_{G \supset D^c} \mathbb{B}(G)$$

$$\mathbb{B}_-(D) = \bigcap_{G \supset \overline{D}} \mathbb{B}(G)$$

$$\partial\mathbb{B}(D) = \bigcap_{G \supset \partial D} \mathbb{B}(G)$$

このとき $X$ のマルコフ性の定義は次のようになる。

<u>Def. 1</u> ( McKean [3] )

$X$ が $\mathcal{D}_\delta$-マルコフ

$$\Leftrightarrow \quad \mathbb{B}_-(D) \perp\!\!\!\perp_{\partial\mathbb{B}(D)} \mathbb{B}_+(D) \quad , \forall D \text{ (有界)}$$

$$\left( \underset{\text{i.e}}{\Leftrightarrow} \quad P(B_- \cap B_+ \mid \partial\mathbb{B}(D)) = P(B_- \mid \partial\mathbb{B}(D))\, P(B_+ \mid \partial\mathbb{B}(D)) \quad \forall B_\pm \in \mathbb{B}_\pm(D), \quad \forall D \text{ (有界)} \right)$$

$X$ が正規定常の場合は，この定義を関数空間の言葉で言いかえることができる。$\mathcal{H}$ を $R$ を再生核にもつ (complex) Hilbert 空間，$Z = \mathcal{L}^2(\Delta)$ とするとき，$G$ に対して $\mathbb{B}(G)$ に対応する，$\mathcal{H}(G) = \mathcal{L}_{\mathcal{H}}(R(\cdot - x) : x \in G)$，$Z(G) = \mathcal{L}_Z(e^{i\cdot x} : x \in G)$ を導入して，$\mathcal{H}_\pm(D)$, $\partial\mathcal{H}(D)$, $Z_\pm(D)$, $\partial Z(D)$ をそれぞれきめると，次の補題がなりたつ。

<u>Lem. 2</u>

$X$ が $\mathcal{D}_\delta$-マルコフ

$$\Leftrightarrow \quad \partial\mathcal{H}(D) = P_{\mathcal{H}_-(D)}\mathcal{H}_+(D) \qquad \forall D$$

$$\Longleftrightarrow \quad \partial Z(D) = P_{Z_-(D)} Z_+(D) \qquad \forall D$$

但し $P_{\mathcal{H}_-(D)}$, $P_{Z_-(D)}$ は $\mathcal{H}_-(D)$, $Z_-(D)$ へのprojectionを表わす。

$\mathcal{H}$ と $Z$ は次の対応でunitary同型であることを注意しておく。

$$\mathcal{H}(G) \longleftrightarrow Z(G)$$

(1.1)

$$\circ \quad u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\lambda\cdot x} f(\lambda)\Delta(\lambda)\,d\lambda$$

$$\circ \quad \|u\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|^2 \Delta(\lambda)\,d\lambda$$

以後 $\varphi$ のFourier変換 $\hat{\varphi}$ を次のように定義する。

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\lambda\cdot x} \varphi(x)\,dx$$

## §2　マルコフ性の $\Delta$ による特徴付け.

この§は[2]の要約である。$\Delta$ に対して次の制限を設ける。

(*) 非負単調増大連続関数 $T$ で積分の収束条件 $\int^{+\infty} \frac{T(\rho)}{\rho^2}\,d\rho < +\infty$ をみたすものがあり, $\Delta$ は次の条件をみたす。

① $\dfrac{1}{\Delta(x)} \leq C\, e^{T(|x|)}$　$|x|$ 十分大

② $\dfrac{1}{\Delta} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$

このTについては次の補題が成りたつ。

Lem. 3 (M. C. Roumieu [4])

Tが非負単調増大連続関数で $\int^{+\infty} \frac{T(\rho)}{\rho^2} d\rho < +\infty$ ならば、正の単調増大列 $\{M_k\}_{k=0}^{\infty}$ で次の条件をみたすものが存在する。

① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_{k-1}}{M_k} < +\infty$

② $M_{k-1} M_{k+1} \leq M_k^2 \quad (k = 1, 2, \cdots)$

③ ${}^{\forall} h > 0$ に対して

$$\lim_{\rho \uparrow +\infty} \{ M(\rho/h) - (T(\rho) + \sqrt{\rho}) \} = +\infty$$

$$\left( \text{但し} \quad M(\rho) = \log \sup_{k \geq 0} \frac{\rho^k M_0}{M_k} \right)$$

Mを使って定義される support compact な Ultra-differentiable な test function の空間を $\mathcal{D}_M$ とする。$\mathcal{D}_M$ 又は $\mathcal{D}_M'$ については H. Komatsu [5] に要約してある。(但し $\mathcal{D}_M$ は Roumieu type.)

Lem. 4

$\mathcal{D}_M$ は $\mathcal{H}$ の dense な subset で injection は連続である。

$f \in Z$ に対して $\hat{f} \in \mathcal{H}'$ を次のように定義する。

$u \in \mathcal{H}$ とすると (1,1) より $^{\exists 1} g \in Z$, $u = \widehat{g\Delta}$ となる。この $g$ を使って

$$\langle \hat{f}, u \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda) g(\lambda) \Delta(\lambda) d\lambda$$

と定義する。$|\langle \hat{f}, u \rangle| \leq \|f\|_Z \|g\|_Z = \|f\|_Z \|u\|_{\mathcal{H}}$ であるから、$\hat{f} \in \mathcal{H}'$ となるのである。

Lem.4 より $\mathcal{H}' \hookrightarrow \mathcal{D}'_H$ (injection 連続) となる。$\hat{f}$ を $\mathcal{D}'_H$ の元とみることにより次の定理が成り立つ。

Th. 5

① $Z_-(D) = \{ f \in Z \mid \operatorname{supp} \hat{f} \subset \overline{D} \}$ $\quad {}^{\forall} D$ (有界)

(注: Paley-Wienerの定理より $Z_-(D)$ の元はとくに entire function である。)

② $Z_-(D)$ は2変数として連続な再生核をもつ。

Th. 6

$X$ が $\mathcal{D}_0$-マルコフ

$\Leftrightarrow \Delta^{-1} = P \qquad P$: infra exponential type の entire function.

[1]で Th.6 の片方に相当する「$\Delta^{-1} = P$ なら $X$ は $\mathcal{D}_0$-マルコフである。」を示したが、そのときの主要な補題が今の場合 Th.5 になっている。制限(*)を設けて Ultradistribution を使っ

たのは、定理5を示すとき$\hat{\mathcal{Q}}$を位相とsheaf-propertyをもった関数空間に埋め込む必要があったからであるが、定理6の必要条件も容易に示せるからでもある。

## §3. Predictionと境界値問題についての一考察（$\mathcal{X}$がユルコフの場合。）

この§では$\mathcal{X}$はユルコフで、$\Delta$は条件(H)をみたしているとする。

$u \in \mathcal{H}$に対して $H_{\partial D}(x, u) = (P_{\partial\mathcal{H}(D)} u)(x)$ とおく。$\mathcal{H}$の元は連続関数であるから右辺は意味がある。

<u>Lem. 7</u>

① $H_{\partial D}(x, \cdot) \in \mathcal{H}'$

② $\operatorname{supp} H_{\partial D}(x, \cdot) \subset \partial D$ （$\mathcal{D}'_H$の元としてのsupport.）

「証明」 ① $u \in \mathcal{H}$とすると

$$\begin{aligned}|H_{\partial D}(x, u)| &= |(P_{\partial\mathcal{H}(D)} u)(x)| \\ &= |(P_{\partial\mathcal{H}(D)} u, R(\cdot - x))_{\mathcal{H}}| \\ &= |(u, P_{\partial\mathcal{H}(D)} R(\cdot - x))_{\mathcal{H}}| \\ &\leq \|P_{\partial\mathcal{H}(D)} R(\cdot - x)\|_{\mathcal{H}} \|u\|_{\mathcal{H}}\end{aligned}$$

より明らかである。

②：$\varphi \in \mathcal{D}_M$，$\mathrm{supp}\,\varphi \cap \partial D = \phi$ とする。$\partial D$ は compact であるから $\exists \varepsilon > 0$，$\mathrm{supp}\,\varphi \cap (\partial D)_\varepsilon = \phi$（但し $(\partial D)_\varepsilon$ は $\partial D$ の $\varepsilon$-近傍を表わす）

だから　$R(\cdot - x)$：$x \in (\partial D)_\varepsilon$　に対しては

$$(\varphi,\ R(\cdot - x))_{\mathcal{H}} = \varphi(x) = 0$$

即ち　$\varphi \in \mathcal{H}((\partial D)_\varepsilon)^{\perp}$ となる。$\partial\mathcal{H}(D) \subset \mathcal{H}((\partial D)_\varepsilon)$ であるから　$\varphi \in (\partial\mathcal{H}(D))^{\perp}$

これは　$H_{\partial D}(x, \varphi) = (P_{\partial\mathcal{H}(D)}\varphi)(x) \equiv 0$

を示している。　「証明終り」

さて Process $X$ の Prediction を空間 $\mathcal{H}$ で考えると次のようになる。

「$\mathcal{H}_+(D)$ の元 $u$ に1番近い $\mathcal{H}_-(D)$ の元 $v$ は何か。」

明らかに　$v = P_{\mathcal{H}_-(D)}u$　であるが，ここでは $v$ が $u$ からどのようにしてきまるかを作用素 $P(i\partial)$（$P = \Delta^{-1}$）でみてみよう。

<u>Prop. 8</u>

$u \in \mathcal{H}_+(D)$ に対して　$v = P_{\mathcal{H}_-(D)}u$　とすると

① $\begin{cases} v = u & \text{on } D\ (\overline{D}) \\ P(i\partial)v = 0 & \text{on } D^c \end{cases}$

② $\quad v(x) = H_{\partial D}(x, u) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d$

「証明」① $x \in D$ に対しては

$$
\begin{aligned}
v(x) &= (P_{\mathcal{H}_-(D)} u)(x) \\
&= (P_{\mathcal{H}_-(D)} u,\ R(\cdot - x))_{\mathcal{H}} \\
&= (u,\ P_{\mathcal{H}_-(D)} R(\cdot - x))_{\mathcal{H}} \\
&= (u,\ R(\cdot - x))_{\mathcal{H}} \quad (\because\ R(\cdot - x) \in \mathcal{H}_-(D)) \\
&= u(x)
\end{aligned}
$$

となるから①は示された。

②は $\mathcal{X}$ がマルコフ性をもつから Lem. 2 より $P_{\mathcal{H}_-(D)}\mathcal{H}_+(D) = \partial\mathcal{H}(D)$ となる。だから $u \in \mathcal{H}_+(D)$ に対しては $v(x) = (P_{\partial\mathcal{H}(D)} u)(x)$ $(= (P_{\partial\mathcal{H}(D)} u)(x)) = H_{\partial D}(x, u)$ である。　　「証明終り」

$\mathcal{H}_-(D) = \mathcal{H}(D)$ を仮定するならば Proposition 8 により $v$は境界条件が$u$に等しく$D$の外部で$P$-harmonicな$\mathcal{H}$の元として一意的にきまっており，harmonic measure に相当するのが $H_{\partial D}(x, \cdot)$である。とくに $P(i\partial)$ が（有限階）の微分作用素のときは境界条件としてどのようなものをおけば，この境界値問題が well-posed になるかということは興味あることであるが，それは③より $H_{\partial D}(x, \cdot)$の形と関係している。

定理5より $\partial Z(D)$ は再生核 $J_{\partial D}$ をもっているが次に $H_{\partial D}$

を $J_{\partial D}$ で表わすことを考えよう。

<u>Th. 9</u>

$$H_{\partial D}(x,\cdot) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda\cdot x}\, \overline{\widehat{J^{\lambda}_{\partial D}}}\, \frac{1}{p(\lambda)}\, d\lambda$$

（積分は $\mathcal{H}'$ での弱積分。）

「証明」　$u \in \mathcal{H}$ に対して，$u = \widehat{\frac{f}{p}}$ とすると

$$\langle \overline{\widehat{J^{\lambda}_{\partial D}}}, u \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{J^{\lambda}_{\partial D}(x)}\, f(x)\, \frac{1}{p(x)}\, dx$$

$$= (P_{\partial Z(D)} f)(\lambda)$$

であるから

$$\langle \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda x}\, \overline{\widehat{J^{\lambda}_{\partial D}}}\, \frac{1}{p(\lambda)}\, d\lambda,\ u \rangle$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda x} (P_{\partial Z(D)} f)(\lambda) \frac{1}{p(\lambda)}\, d\lambda$$

$$= (P_{\partial Z(D)} f,\ e^{i\cdot x})_Z$$

$$= (P_{\partial \mathcal{H}(D)} u,\ R(\cdot - x))_{\mathcal{H}}$$

$$= (P_{\partial \mathcal{H}(D)} u)(x)$$

$$= H_{\partial D}(x, u)$$

となり Th. 9 は示された。　　　　「証明終り」

# 参考文献


[1] S. Kotani. and Y. Okabe

On the Markovian property of stationary Gaussian processes with a multi-dimentional parameter.

数理解析研究所講究録.

[2] S. Kotani

$\mathbb{R}^d$-径数正規定常過程のマルコフ性について.

修士論文.

[3] H.P. McKean, JR

Brownian motion with a several dimentional time.

Theory of Prob. and its appli. 8 (1963)

[4] M.C. Roumieu.

Sur quelques extensions de la notion de distribution.

Ann. Scient. Éc norm. Sup. 3 série 77

[5] H. Komatsu.

Ultradistributions and hyperfunctions.

数理解析研究所講究録.